



Sveučilište u Splitu
Fakultet građevinarstva,
arhitekture i geodezije

KVALIFIKACIJSKI DOKTORSKI ISPIT

Identifikacija parametara rešetkastih (Lattice) modela korištenjem Bayesove stohastičke metode

Duje Pavić

Split, travanj 2026.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Pregled područja	3
2.1	Numeričko modeliranje kvazi-krhkih materijala	3
2.1.1	Pregled numeričkih pristupa	4
2.1.2	Rešetkasti (Lattice) modeli grednih elemenata	6
2.1.2.1	Diskretizacija materijalne domene	6
2.1.2.2	Gredni element sa ugrađenim diskontinuitetima	7
2.1.2.3	Ograničenja rešetkastih modela	10
2.2	Identifikacija parametara	10
2.2.1	Bayesov stohastički okvir	10
2.2.2	MCMC i Kalman filter metoda za aproksimaciju rješenja	11
2.2.3	Surogat modeli	13
2.2.4	Analiza osjetljivosti parametara	16
3	Smjernice daljnjeg istraživanja	17
	Zahvala	18
	Literatura	22

1. Uvod

Kvazi-krhki materijali čine jednu od najvažnijih i najraširenijih skupina materijala u suvremenom građevinarstvu, geotehnici i drugim tehničkim disciplinama. Beton, stijene, mortovi i srodni materijali svakodnevno se primjenjuju u različitim inženjerskim rješenjima. Iako se njihovo ponašanje često prikazuje pojednostavljenim inženjerskim modelima, stvarni mehanizmi su znatno složeniji. Slom ovih materijala odvija se postupno, kroz razvoj zona mikropukotina koje se šire, spajaju i na kraju formiraju makropukotine. Na taj proces značajno utječu heterogena unutarnja struktura, lokalne koncentracije naprezanja, početni defekti i ovisnost o veličini elementa. Ovi čimbenici čine pouzdano predviđanje stvarnog ponašanja konstrukcija izuzetno zahtjevnim [1].

Za vjernu simulaciju ovako složenih fenomena razvijeni su brojni numerički pristupi koji nastoje obuhvatiti prijelaz iz kontinuiranog u potpuno diskontinuirano ponašanje materijala. U ovom radu poseban je naglasak na rešetkastim modelima grednih elemenata, koji su posebno prikladni za prikaz materijalne heterogenosti i mehanizama loma. Ipak, svi numerički modeli, bez obzira na razinu sofisticiranosti, ovise o preciznim vrijednostima materijalnih parametara kao što su čvrstoća, energija loma, elastična svojstva i druge konstante [2–4]. Tradicionalne metode određivanja tih parametara često su nepouzdate zbog značajnih nesigurnosti, uključujući eksperimentalnu raspršenost rezultata, nepoznate početne defekte, utjecaj mjerila i inherentna ograničenja modela. Zbog toga je nužan stohastički pristup identifikaciji parametara. Umjesto određivanja jedne optimalne vrijednosti, Bayesova stohastička metoda omogućuje sustavno uključivanje svih dostupnih informacija o parametrima, uzimanje u obzir mjernih pogrešaka i nesigurnosti modela te dobivanje distribucije vjerojatnih vrijednosti parametara. Ovakav pristup ne samo da povećava točnost simulacija, već omogućuje i kvantifikaciju pouzdanosti predviđanja [5, 6].

Ovaj rad opisuje povezivanje naprednih numeričkih modela kvazi-krhkih materijala s identifikacijom njihovih parametara primjenom Bayesove stohastičke metode.

2. Pregled područja

2.1. Numeričko modeliranje kvazi-krhkih materijala

Kvazi-krhki materijali, kao što su beton, stijene, keramika, mortovi i određeni kompoziti, predstavljaju važnu skupinu inženjerskih materijala čije je mehaničko ponašanje obilježeno prijelazom između krhkog i duktilnog loma. Za razliku od idealno krhkih materijala, primjerice stakla, koji naglo gube nosivost bez značajne plastične deformacije, kvazi-krhki materijali pokazuju ograničenu sposobnost redistribucije naprezanja prije konačnog loma. Ta se karakteristika očituje kroz postupno omekšavanje materijala, razvoj zone procesa loma (fracture process zone, FPZ) i stvaranje višestrukih mikro- i makropukotina [1].

Analiza kvazi-krhkih materijala zahtijeva razmatranje efekta veličine (size effect), izražene razlike između vlačne i tlačne čvrstoće te snažnog utjecaja heterogenosti na ukupno ponašanje. Heterogenost uzrokuje lokalizaciju oštećenja u uskim zonama, što onemogućuje uniformnu raspodjelu naprezanja. Kao rezultat toga, dolazi do omekšavanja materijala pri kojem nosivost opada s povećanjem deformacije nakon dostizanja vršnog naprezanja. Efekt veličine kod kvazi-krhkih materijala može se manifestirati na različite načine, od klasičnog opadanja čvrstoće s povećanjem dimenzija uzorka do uzlazno-opadajućih i drugih složenijih trendova [7]. Ovi različiti oblici efekta veličine proizlaze iz odnosa između rasta maksimalne početne pukotine i širenja zone procesa loma (FPZ) s povećanjem veličine uzorka.

Kvazi-krhke materijale karakterizira višerazinska heterogenost, pri čemu unutarnja struktura na različitim skalama značajno utječe na makroskopsko mehaničko ponašanje. Raspodijeljeno mikropucanje često prethodi formiranju većih pukotina koje se spajaju unutar zone loma [8]. Prisutnost diskontinuiteta u polju pomaka uzrokuje postupno smanjenje čvrstoće, dok daljnji razvoj i otvaranje novih pukotina dovodi do izraženijeg omekšavanja sve do konačnog loma [9].

Modeliranje lokalizacije raspodijeljenog mikropucanja u konačnu zonu procesa loma ključno je za brojne inženjerske primjene, osobito kada otvaranje i međusobno spajanje pukotina utječu na zaostalu čvrstoću, propusnost ili dugoročnu trajnost materijala [4].

Za proučavanje fenomena u kvazi-krhkim materijalima često se koristi pristup na tri razine prema Wittmannu [10], koji je detaljnije razrađen u kasnijim radovima [11]. Ponašanje materijala analizira se na tri međusobno povezane razine, ovisno o prirodi problema, dimenzijama uzorka i dostupnim računalnim resursima. Na mikrorazini se detaljno analiziraju temeljne sastavnice materijala, uključujući pojedinačne faze, pore, kristale, zrnca i inicijalne mikropukotine te njihove međusobne interakcije. Mezorazina obuhvaća heterogenu strukturu sastavljenu od različitih faza, kao što su agregat i cementna pasta kod betona, te procese razvoja i propagacije mikropukotina do formiranja zone procesa loma. Modeliranje na mikro- i mezorazini omogućuje fizikalno najtočniji prikaz procesa loma jer uzima u obzir utjecaj i interakciju pojedinih komponenti. Međutim, zbog visoke računalne složenosti, takvi modeli su uglavnom ograničeni na male domene i lokalne zone u kojima se simulira proces loma.

Na makrorazini materijal se smatra približno homogenim i uniformnim, a analizira se globalno mehaničko ponašanje konstrukcijskih elemenata i cijelih struktura. Na ovoj razini utjecaj heterogenosti i detaljni procesi inicijacije i propagacije pukotina nisu uključeni. Makromodeliranje se najčešće koristi pri analizi konstrukcija većih dimenzija, gdje se očekuje pojava jedne dominantne makropukotine, ili u slučajevima kada bi modeliranje na manjim razinama zahtijevalo prevelike računalne resurse. Odabir odgovarajuće razine modeliranja uvijek predstavlja kompromis između potrebne detaljnosti, fizikalne točnosti i praktične računalne izvedivosti.

Numeričko modeliranje ovih materijala predstavlja značajan izazov u području računalne mehanike. Prilikom simulacije njihova ponašanja potrebno je istovremeno uzeti u obzir heterogenost strukture, vrstu i opseg analiziranog problema te odabrati odgovarajuće numeričke i konstitutivne modele [2, 12]. Najčešće je potrebno postići kompromis između raspoloživih računalnih kapaciteta i željene preciznosti rezultata. U nastavku poglavlja opisan je pregled glavnih numeričkih pristupa za modeliranje kvazi-krhkih materijala.

2.1.1 Pregled numeričkih pristupa

Numeričko modeliranje kvazi-krhkih materijala dijeli se na tri glavne skupine pristupa: kontinuumske, diskontinuumske i hibridne [3, 13–15].

Kontinuumski pristupi temelje se na pretpostavci kontinuiranosti prostorne domene, čime se osigurava neprekinutost između različitih točaka [2]. Najistaknutija i najčešće primjenjivana tehnika u ovoj skupini je metoda konačnih elemenata (FEM). Ova metoda dijeli kontinuirane materijalne domene na manje poddomene, odnosno konačne elemente. Elementi mogu biti linijski, plošni ili volumenski, a međusobno su povezani čvorovima. Unutar svakog elementa nepoznata funkcija, primjerice pomak, aproksimira se polinomnim interpolacijskim funkcijama na temelju vrijednosti u čvorovima. Lokalni izračuni provode se unutar svakog elementa, nakon čega se krutosti pojedinačnih elemenata spajaju u globalnu matricu krutosti. Rješavanjem globalnog sustava jednadžbi dobivaju se vrijednosti tražene funkcije u svim čvorovima, dok se interpolacijskim funkcijama izračunavaju vrijednosti u bilo kojoj točki unutar elementa.

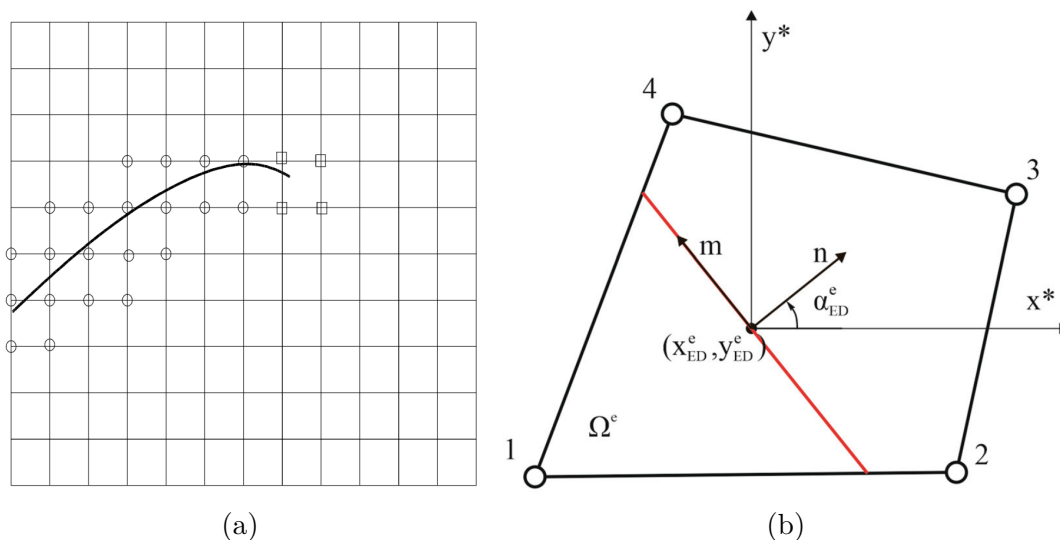
Jedna od prednosti FEM-a je mogućnost jednostavnog dodjeljivanja različitih materijalnih svojstava pojedinim elementima, čime se učinkovito prikazuje heterogenost materijala, primjerice agregata i cementne paste [13]. Međutim, klasični FEM ima značajna ograničenja pri modeliranju loma i oštećenja. Tijekom simulacije nastanka pukotina, rješenje ovisi o veličini mreže konačnih elemenata, a putanja pukotine može biti umjetno usmjerena prema rasporedu elemenata. Ključna poteškoća je osigurati ispravan i o mreži neovisan prikaz ponašanja omekšavanja nakon vršnog opterećenja, što utječe na realnu disipaciju energije [16–18].

Kako bi se prevladali navedeni nedostaci, razvijene su poboljšane metode konačnih elemenata: metoda konačnih elemenata s ugrađenim diskontinuitetima (ED-FEM) [19] i proširena metoda konačnih elemenata (X-FEM) [20]. Oba pristupa temelje se na obogaćivanju standardnih konačnih elemenata dodatnim funkcijama koje opisuju diskontinuitete, što omogućuje učinkovito

modeliranje loma materijala neovisno o diskretizaciji domene i veličini konačnih elemenata [21].

X-FEM obogaćuje polje pomaka globalno na čvorovima, čime omogućuje opis pukotina neovisno o mreži elemenata i njihovu propagaciju kroz cijelu domenu. Ovaj pristup ne omogućuje kondenzaciju ukupne matrice krutosti i uvodi dodatne nepoznanice u globalni sustav jednadžbi ravnoteže. Kao posljedica, povećava se ukupna računalna složenost i potrebno je više vremena za izvođenje simulacija, osobito kod problema s velikim brojem elemenata ili višestrukim pukotinama. Zbog globalnog obogaćenja, pukotina ostaje kontinuirana, što može predstavljati problem pri simuliranju grananja i srastanja pukotina te zahtijeva dodatna poboljšanja metode, kao što su algoritmi praćenja za složenije slučajeve [22]. Slika 1a prikazuje mrežu X-FEM elemenata gdje su zaokruženi čvorovi obogaćeni.

ED-FEM postiže opis stvaranja pukotina obogaćivanjem polja pomaka na lokalnoj razini unutar samog elementa. Ovim pristupom omogućuje se formiranje kondenziranih matrica krutosti elemenata i eliminacija dodatnih nepoznanica u globalnom sustavu. Skok u polju pomaka ostaje lokaliziran unutar elementa, pa algoritmi praćenja pukotina općenito nisu potrebni. Ovakav pristup omogućuje prikaz složenih pukotina [23, 24]. Međutim, algoritmi za praćenje pukotina postaju potrebni u specifičnim situacijama, primjerice kada se simuliraju problemi s izrazito heterogenim materijalima, kod pojave višestrukih ili međusobno interaktivnih pukotina, kao i kada je neophodno precizno pratiti propagaciju, grananje ili spajanje pukotina kroz više elemenata. U takvim slučajevima, algoritam za praćenje pomaže ublažiti probleme povezane s blokiranjem naprezanja [25]. To je ključno za sprječavanje zaustavljanja ili neželjenog blokiranja pukotine te osigurava uspješno spajanje i prikaz kompleksnog toka pukotina. Slika 1b prikazuje jedan konačni element sa ugrađenim diskontinuitetima.



Slika 1: Modeli kontinuum pristupa: a) X-FEM elementi [22], b) ED-FEM element [25].

Diskontinuumski pristupi u potpunosti napuštaju pretpostavku kontinuiteta te materijal prikazuju kao skup diskretnih elemenata koji međusobno prenose sile i momente putem kontakata. Najzastupljenija metoda u ovoj skupini je metoda diskretnih elemenata (DEM – Discrete Element Method) [13, 14]. DEM simulira materijal kao skupinu krutih ili deformabilnih čestica koje ostvaruju interakciju preko kontaktnih sila i momenata, pri čemu se kontakti dinamički ažuriraju tijekom analize. Za razliku od rešetkastih modela koji zadržavaju fiksnu povezanost između elemenata, DEM omogućuje promjenu topologije zbog velikih pomaka i rotacija te automatski prepoznaje nove kontakte. Ovaj pristup prirodno obuhvaća heterogenost mikrostrukture, inicijaciju i propagaciju višestrukih pukotina te mikro-mehanizme loma bez potrebe za dodatnim kriterijima ili obogaćenjima [4, 26]. Međutim, DEM ima određena ograničenja, uključujući veliku računalnu složenost i potrebu za značajnim resursima, osobito kod simulacija s velikim brojem čestica, što može znatno produljiti vrijeme simulacije [27].

Rešetkasti (lattice) modeli predstavljaju poseban oblik diskretnih elemenata (DEM) u kojem

je čvorna povezanost elemenata fiksna. Klasični rešetkasti modeli koriste grede kao elemente povezane između čvorova, pri čemu gredni elementi prenose moment savijanja, posmičnu silu i uzdužnu silu [3, 28, 29]. Kriterij loma elementa najčešće se provjerava na kohezivnoj vezi; kada veza dosegne kritičnu vrijednost naprezanja, element se uklanja ili se njegovo ponašanje opisuje modelom omekšavanja. Ugradnjom diskontinuiteta unutar elementa omogućuje se realistično omekšavanje materijala, čime se postižu rezultati neovisni o veličini mreže [30, 31]. Na taj način rešetkasti modeli omogućuju simulaciju loma različitih kvazi-krhkih materijala. Ovi modeli su relativno jednostavni, računalno učinkoviti i vjerno prikazuju osnovne mehanizme loma, ali im nedostaje mogućnost kontrole bočnog deformiranja zbog Poissonovog koeficijenta [32]. Detaljnije o rešetkastim modelima bit će obrađeno u poglavlju 2.1.2.

Također je važno spomenuti rešetkaste modele na bazi čestica, koji dijele mnoge sličnosti s grednim modelima, ali se razlikuju po tome što je svaki čvor smješten unutar geometrijskog oblika, odnosno čestice. Najpoznatiji su modeli opruga krutih tijela (RBSM – Rigid-Body-Spring Models) [33], gdje se domena diskretizira u krute jedinice povezane oprugama, te rešetkasti modeli diskretnih čestica (LDPM – Lattice Discrete Particle Model) [34].

Hibridni pristupi, poput metode konačno-diskretnih elemenata (FDEM – Finite Discrete Element Method), predstavljaju kombinaciju kontinuumskog i diskontinuumskog pristupa [14]. U FDEM-u se ponašanje materijala do pojave pukotina modelira kontinuumski metodom konačnih elemenata, dok se pojava i širenje pukotine odvija putem diskretnih kontakata između konačnih elemenata. Ovakav hibridni pristup omogućuje modeliranje prijelaza iz kontinuumskog u potpuno diskretno ponašanje, što je posebno korisno u dinamičkim analizama i kod kompleksnih geometrija [35].

2.1.2 Rešetkasti (Lattice) modeli grednih elemenata

U rešetkastim modelima najčešće se primjenjuju dvije teorije greda: Euler-Bernoullijeva i Timoshenkova teorija. Euler-Bernoullijeva teorija pretpostavlja da poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju grede tijekom deformacije te zanemaruje utjecaj posmičnog naprezanja. Stoga je prikladna isključivo za tanke i dugačke grede [36]. Za kratke i masivne grede, što je čest slučaj u mrežama rešetkastih modela, prikladnije je koristiti Timoshenkove gredne elemente. Timoshenkova teorija proširuje Euler-Bernoullijev pristup uzimajući u obzir utjecaj posmičnog naprezanja i kutne deformacije. U ovom pristupu poprečni presjeci više nisu nužno okomiti na elastičnu liniju grede, već dolazi do dodatne kutne deformacije uzrokovane posmičnim naprezanjem. Ova teorija omogućuje realističniji prikaz posmika i savijanja [37].

2.1.2.1 Diskretizacija materijalne domene

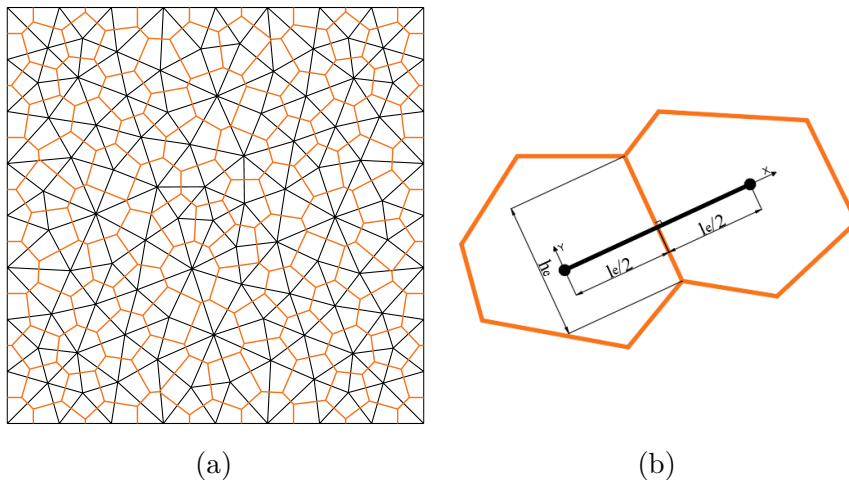
Diskretni rešetkasti modeli temelje se na diskretizaciji materijalne domene pomoću mreže čvorova međusobno povezanih grednim elementima. Osnovni pristupi diskretizaciji uključuju pravilne (regularne) i nepravilne (nasumične) mreže.

Pravilne mreže karakterizira simetrija i jednake duljine greda, što rezultira visokim stupnjem homogenosti i vjerno prikazuje elastično uniformno ponašanje materijala. Međutim, zbog niske izotropnosti, takve mreže mogu uzrokovati neželjeno usmjeravanje pukotina u smjeru mreže, čime se povećava ovisnost rezultata o mreži [38].

Nepravilne mreže postižu viši stupanj izotropnosti jer su čvorovi i grede raspoređeni nasumično, s različitim duljinama i orijentacijama. Ovakva konfiguracija značajno smanjuje ovisnost smjera pukotina o mreži i omogućuje točniji prikaz loma. Nedostatak nepravilnih mreža je da pod uniformnim opterećenjem ne pokazuju potpuno uniformno ponašanje zbog varijabilnosti duljina i orijentacija greda [29, 33, 34].

Jedna od najčešće korištenih diskretizacijskih tehnika materijalne domene je Voronoi teselacija u kombinaciji s Delaunay triangulacijom, prikazano na Slici 2a [39]. Voronoi teselacija dijeli domenu na nepreklapajuće poligonalne ćelije generirane oko nasumično raspoređenih čvorova. Svaka ćelija predstavlja područje najbliže svom čvoru, a stranice poligona su okomite na linije koje spajaju susjedne čvorove. Rešetkasta mreža konstruira se povezivanjem čvorova susjednih

Voronoi ćelija grednim elementima. Ti gredni elementi predstavljaju kohezivne veze između ćelija, a njihova visina odgovara duljini zajedničke stranice dviju susjednih Voronoi ćelija (Slika 2b) [40, 41].



Slika 2: a) Nepravilna rešetkasta domena dobivena Voronoijevom teselacijom i Delaunayevom triangulacijom [41], b) Dvije susjedne Voronoi ćelije [41]

Delaunay triangulacija, kao dvojna Voronoi teselaciji, rezultira mrežom s nasumičnim rasporedom elemenata i optimalnim stupnjem homogenosti i izotropnosti [42]. Ova konfiguracija posebno je pogodna za modeliranje heterogenih kvazi-krhkih materijala jer minimizira ovisnost smjera pukotina o mreži i omogućuje realan prikaz grananja i spajanja pukotina.

2.1.2.2 Gredni element sa ugrađenim diskontinuitetima

U diskretnim rešetkastim modelima temeljenim na Voronoi ćelijama, lokalizirana lomna ponašanja mogu se objektivno i neovisno o strukturi mreže prikazati na više načina. Jedna od najkoristenijih metoda je obogaćivanje rešetkastih elemenata ugrađivanjem jakih diskontinuiteta. Ovaj pristup, razvijen unutar okvira metode nekompatibilnih modova i Hu–Washizu mješovite varijacijske formulacije, omogućuje da se skok u polju pomaka uvijek lokalizira unutar samog elementa [30, 31]. Nakon dostizanja vršnog naprezanja, dolazi do omekšavanja materijala uz precizan prikaz energije loma, koja je potpuno neovisna o veličini i orijentaciji mreže. Poslje vršno omekšavanje ovisi o odabranom konstitutivnom zakonu na diskontinuitetu, što omogućuje fleksibilan prikaz različitih vrsta lomnih ponašanja. Nadalje, ovakav model omogućuje prikaz cjelokupnog procesa loma: od inicijacije mikropukotina u zoni procesa loma, preko njihovog rasta i međusobnog spajanja u makropukotine, do konačnog potpunog odvajanja materijala. Ključna prednost ovog pristupa je mogućnost obuhvaćanja svih fundamentalnih lomnih modova unutar jednog grednog elementa: dva u 2D domeni i tri u 3D domeni (detaljnije u nastavku poglavlja). Diskontinuitet se aktivira točno na mjestu zajedničke strane dviju susjednih Voronoi ćelija, čime se osigurava fizička i geometrijska konzistentnost te prirodan prijelaz od kontinuiranog prema potpuno diskontinuiranom ponašanju materijala [3, 40, 43].

Za domenu diskretiziranu Voronijevom teselacijom, visina poprečnog presjeka grednog elementa definira se kao duljina stranice dviju susjednih Voronoi ćelija koja spaja taj element (vidi sliku 2b), kako je objašnjeno u prethodnom poglavlju. Ovim pristupom dobivaju se relativno kratki elementi s visokim poprečnim presjekom, što je karakteristično za rešetkaste modele ove vrste [41].

Standardna kinematika takvog grednog elementa temelji se na Timoshenko teoriji grede. U 2D slučaju svaki čvor elementa ima tri stupnja slobode: uzdužni pomak, poprečni pomak i rotaciju oko osi okomite na ravninu. U 3D slučaju svaki čvor ima šest stupnjeva slobode: tri translacijska pomaka (u smjerovima x , y i z) i tri rotacije oko tih osi. Polje pomaka u klasičnom obliku interpolira se linearnim baznim funkcijama između dva čvora elementa. Kako bi se omogućio

prikaz lokaliziranih lomova, klasično polje pomaka obogaćuje se dodatnim skokom na mjestu diskontinuiteta. Time se dobiva prošireno polje pomaka koje se definira kao:

$$\mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) + \boldsymbol{\alpha} H_{x_c}(x). \quad (1)$$

Ukupno polje pomaka $\mathbf{u}(x)$ predstavlja zbroj glatkog regularnog dijela $\bar{\mathbf{u}}(x)$ i lokaliziranog diskontinuiranog dijela. Lokalizirani dio prikazuje se kao produkt standardne Heavisideove funkcije $H_{x_c}(x)$ i vektora skoka u polju pomaka $\boldsymbol{\alpha}$. Heavisideova funkcija definirana je kao $H_{x_c}(x) = 0$ za $x \leq x_c$ i $H_{x_c}(x) = 1$ za $x > x_c$, gdje je x_c točka diskontinuiteta smještena u sredini grednog elementa, na mjestu gdje dvije susjedne Voronoi ćelije dijele istu stranu. Vektor skoka $\boldsymbol{\alpha}$ definiran je prema dimenziji problema: u 2D slučaju sadrži skok u smjeru uzdužne osi α_u i poprečni skok α_v , dok u 3D slučaju uključuje i poprečni skok van ravnine α_w [30, 31, 40].

Obogaćena kinematika na ovaj način omogućuje prikaz sva tri fundamentalna lomna moda unutar jednog grednog elementa. Mod 1 opisuje otvaranje pukotine, što odgovara uzdužnom skoku u polju pomaka α_u i dovodi do razdvajanja materijala u smjeru normale na površinu diskontinuiteta. Mod 2 predstavlja ravninsko posmično klizanje, prikazano poprečnim skokom α_v , koje odgovara klizanju duž ravnine diskontinuiteta unutar ravnine elementa. Mod 3 opisuje posmično klizanje van ravnine, odnosno kidanje, koje je predstavljeno poprečnim skokom α_w i dovodi do relativnog pomaka izvan ravnine elementa. U 2D modelu koriste se samo prva dva skoka, dok se u punom 3D modelu aktiviraju sva tri. Na taj način, unutar jednog grednog elementa može se simultano prikazati složeno lomno ponašanje karakteristično za heterogene materijale [30, 31, 40].

Kada materijal dosegne kritično naprezanje i nakon aktivacije diskontinuiteta, ponašanje materijala na mjestu diskontinuiteta određuje se konstitutivnim zakonom. Ovaj zakon definira odnos između naprezanja t (normalnog ili posmičnog) na diskontinuitetu i skoka pomaka α . Tijekom opterećenja, naprezanja se postupno povećavaju, a nakon prekoračenja granične vrijednosti započinje proces nastanka pukotine, što rezultira nelinearnim ponašanjem. Nelinearno ponašanje kvazi-krhkih materijala uzrokovano pojavom pukotina najčešće se opisuje pomoću dva osnovna konstitutivna modela: modela oštećenja i modela plastičnosti [3, 31].

Model oštećenja opisuje ponašanje materijala pri kojem svako dodatno opterećenje nakon stvaranja pukotine uzrokuje povećanje razine trajnog oštećenja. Ovaj model posebno je prikladan za kvazi-krhke materijale, kao što su beton, kamen i keramika. Nepovratno oštećenje manifestira se smanjenjem krutosti materijala, što postaje vidljivo tijekom procesa rasterećenja i ponovnog opterećenja. U modelu oštećenja naprezanje na diskontinuitetu t povezano je sa skokom pomaka α preko modula popustljivosti \bar{D} :

$$t = \bar{D}^{-1} \alpha, \quad \bar{D} \in [0, \infty). \quad (2)$$

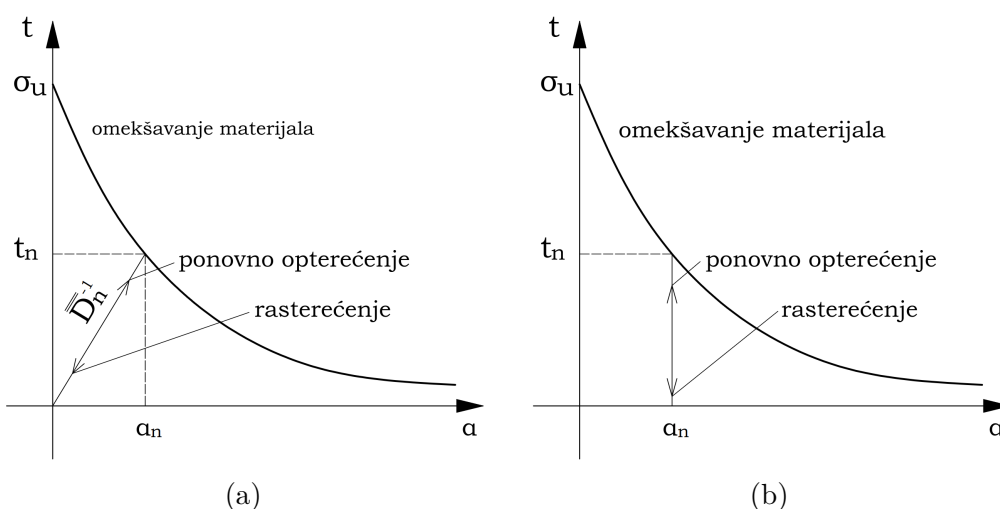
Tijekom procesa omekšavanja, modul popustljivosti \bar{D} progresivno raste, što odgovara postupnom smanjenju nagiba krivulje naprezanja u odnosu na skok pomaka. Ovo ponašanje regulira se funkcijom sloma definiranoj na sljedeći način:

$$\bar{\phi}_d(t, \bar{q}_d) = t - (\sigma_u - \bar{q}_d) \leq 0. \quad (3)$$

U ovoj funkciji, t predstavlja naprezanje na diskontinuitetu, σ_u označava graničnu vrijednost naprezanja materijala neposredno nakon pojave diskontinuiteta, dok \bar{q}_d predstavlja unutarnju varijablu oštećenja. Pozitivna vrijednost funkcije sloma ukazuje na pojavu pukotine ili daljnje oštećenje, dok negativna vrijednost označava da se materijal nalazi unutar elastičnog područja ili u fazi rasterećenja. Evolucija varijable oštećenja opisana je eksponencijalnim zakonom:

$$\bar{q}_d = \sigma_u \left(1 - \exp \left[-\frac{\sigma_u \bar{\xi}_d}{G_f} \right] \right). \quad (4)$$

U ovoj relaciji, G_f označava energiju loma potrebnu za potpuno otvaranje pukotine, dok $\bar{\xi}_d$ predstavlja lokalnu varijablu elementa koja određuje stupanj trajnog oštećenja materijala. Ovakav oblik omekšavanja osigurava da ukupna disipirana energija ostane jednaka G_f . Parametar G_f najčešće se određuje eksperimentalno metodama mjerenja energije potrebne za propagaciju pukotine, primjerice trotočkastim savijanjem ili izravnim testovima kidanja na uzorcima materijala. Lokalna varijabla $\bar{\xi}_d$ može se procijeniti na temelju mjerenja veličine i širenja pukotine ili uz korištenje numeričkih metoda koje prate evoluciju oštećenja na razini konačnih elemenata [3, 24, 25, 31, 40]. Na Slici 3a prikazan je graf naprezanja i skoka na mjestu diskontinuiteta za model oštećenja, gdje je vidljivo da nakon dostizanja graničnog naprezanja σ_u dolazi do omekšavanja materijala. Taj proces odgovara nastanku pukotine i oštećenju materijala, što se očituje padom naprezanja u diskontinuitetu t i povećanjem vrijednosti skoka α u polju pomaka. Rasterećenjem materijala dolazi do zatvaranja pukotina, a pri ponovnom opterećenju materijal pokazuje smanjenu krutost uzrokovanu prethodnim oštećenjima.



Slika 3: Konstitutivni modeli ponašanja: a) Model oštećenja, b) Model plastičnosti

U modelu plastičnosti, umjesto varijable oštećenja, uvodi se varijabla trajne plastične deformacije \bar{q}_p . Prekoračenjem graničnog naprezanja u materijalu nastaju trajne plastične deformacije. Materijal se plastificira, što onemogućava povratak u prvobitno stanje, ali krutost ostaje nepromijenjena kroz sve cikluse rasterećenja i ponovnog opterećenja. Funkcija sloma za model plastičnosti ima isti oblik, a evolucija varijable plastične deformacije slijedi analogni eksponencijalni zakon:

$$\bar{q}_p = \sigma_u \left(1 - \exp \left[-\frac{\sigma_u}{G_f} \bar{\xi}_p \right] \right). \quad (5)$$

U ovom modelu modul popustljivosti \bar{D} nije definiran jer omekšavanje se manifestira isključivo kroz povećanje trajne plastične deformacije.

Na Slici 3b prikazan je graf naprezanja i skoka na mjestu diskontinuiteta za model plastičnosti, gdje je prikazan sličan mehanizam omekšavanja kao kod modela oštećenja. Ključna razlika je da rasterećenjem ne dolazi do smanjenja skoka, već on ostaje konstantan, što ukazuje na trajnu plastičnu deformaciju uz zadržavanje iste krutosti.

U oba modela, regularni (kontinuirani) dio elementa ostaje linearno elastičan i prenosi eventualne rezidualne napone, dok lokalizirani dio na diskontinuitetu u potpunosti upravlja disipacijom energije. Na taj način precizno se prikazuju zone procesa loma u kojima dolazi do nastanka mikropukotina prije potpune lokalizacije i konačnog loma.

2.1.2.3 Ograničenja rešetkastih modela

Rešetkasti modeli koji se temelje na Voronijevoj teselaciji i Timoshenkovim grednim elementima omogućuju detaljnu analizu heterogenosti materijala i razvoja pukotina, no inherentno imaju određena ograničenja, osobito u linearnom elastičnom području. Ova ograničenja proizlaze iz diskretne prirode modela, jednodimenzionalne geometrije elemenata te nepravilne i nasumične mreže generirane Delaunayevom triangulacijom [3].

Jedan od glavnih izazova javlja se pri simulaciji bočnih deformacija povezanih s Poissonovim koeficijentom [32]. Zbog uporabe isključivo jednodimenzionalnih elemenata, klasični rešetkasti modeli teško reproduciraju širok raspon vrijednosti Poissonovog koeficijenta. Lokalni elastični parametri, poput modula elastičnosti E i Poissonovog koeficijenta ν , definirani su na razini pojedinačnog grednog elementa, ali ne osiguravaju ispravno globalno ponašanje materijala. Posljedica su često neujednačena polja pomaka čak i pri uniformnom opterećenju, što uzrokuje oscilacije u deformacijama. Struktura i raspored gredica značajno utječu na kvalitetu elastičnog odgovora. Nepravilne mreže prikladnije su za simulaciju loma jer smanjuju ovisnost o putu pukotine i bolje odražavaju heterogenost materijala, ali istovremeno uzrokuju veće neujednačenosti u elastičnom području [29, 44]. Pravilne mreže osiguravaju bolju homogenost, no uvode geometrijsku pristranost koja može neprirodno usmjeravati put pukotine [42]. Za simuliranje ponašanja kvazi-krhkih materijala u procesima loma najčešće se koriste nepravilne mreže. Međutim, zbog navedenih nedostataka, nepravilne mreže gotovo uvijek zahtijevaju kalibraciju elastičnog ponašanja uvođenjem kalibracijskih koeficijenata [41].

Uz izazove u elastičnom području, dodatne poteškoće pojavljuju se pri određivanju parametara loma. Granične čvrstoće u vlaku, tlaku i posmiku te pripadajuće energije loma (Gf) teško je precizno odrediti jer ovise o heterogenosti materijala i eksperimentalnim uvjetima. Neadekvatne vrijednosti ovih parametara mogu dovesti do pogrešnog ponašanja u posljevršnom području, preuranjenog ili odgođenog loma te nepravilne disipacije energije [28].

2.2. Identifikacija parametara

U numeričkom modeliranju mehaničkog ponašanja materijala, bez obzira na to radi li se o kontinuumskim ili diskontinuumskim modelima, ključni izazov predstavlja određivanje nepoznatih parametara modela. U rešetkastim modelima to su kalibracijski koeficijenti, granične čvrstoće, energije loma i druge materijalne konstante. Kada su dostupna mjerenja, bilo eksperimentalna ili sintetička (dobivena iz numeričkih simulacija), problem se svodi na inverzni problem. Među različitim pristupima inverznim metodama, Bayesova stohastička identifikacija predstavlja jednu od najsnažnijih i najčešće korištenih metoda.

Bayesova metoda omogućuje sustavno uključivanje početnog znanja o parametrima, mjerne nesigurnosti te greške modela u okviru vjerojatnosnog pristupa. Umjesto jedne determinističke vrijednosti, dobiva se posteriorna distribucija parametara, koja kvantificira njihove neizvjesnosti i međusobne korelacije. U nastavku se detaljno opisuje stohastička formulacija problema, korištenje surogat modela za ubrzanje izračuna, analiza osjetljivosti parametara te metode za dobivanje posteriorne distribucije parametara [6, 45].

2.2.1 Bayesov stohastički okvir

Proces započinje početnim znanjem o nepoznatim parametrima. Ako postoji određeno uvjerenje o mogućim vrijednostima parametara, to uvjerenje se predstavlja vjerojatnostima. Parametri se stoga modeliraju kao slučajna varijabla čija početna, odnosno priorna, distribucija odražava početno uvjerenje i označava se s $\pi(z)$. Svaki parametar z_i karakteriziran je svojom funkcijom gustoće vjerojatnosti $\pi_i(z_i)$ [45, 46]. Uz pretpostavku međusobne neovisnosti parametara, njihova zajednička funkcija vjerojatnosti $\pi(z)$ može se izraziti kao:

$$\pi(z) = \prod_{i=1}^n \pi_i(z_i). \quad (6)$$

Izraz $\pi(z)$ naziva se početnom (prior) distribucijom vrijednosti parametara. Izbor početne distribucije ovisi o nekoliko čimbenika, kao što su inženjersko iskustvo, rezultati prethodnih identifikacija, dostupna mjerenja ili pretpostavke. Iako se teoretski može koristiti bilo koja vrsta distribucije, najčešće se biraju neke standardne distribucije, primjerice uniformna, normalna (Gaussova) ili lognormalna distribucija [6, 47].

Vrijednost mjerenja y , koja bi se dobila determinističkim rješavanjem "forward" modela za zadani parametar z , izražava se kao $y = G(z)$. Jedno ostvareno mjerenje (bilo stvarno ili sintetičko) tada se može zapisati kao [48]:

$$d_i = y_i + \epsilon_i = G(z_i) + \epsilon_i, \quad (7)$$

gdje je ϵ_i vrijednost pogreške mjerenja, definirana funkcijom gustoće vjerojatnosti π_ϵ . Pretpostavlja se da je pogreška ϵ statistički neovisna o parametru z i da posjeduje vlastitu distribuciju vjerojatnosti.

Novi podaci mjerenja d , primjerice iz mjerenja polja pomaka, omogućuju stjecanje dodatnih informacija o nepoznatim parametrima. Zadatak je ažurirati početno uvjerenje o traženim parametrima na najjednostavniji način, pri čemu novo znanje ne smije biti u suprotnosti s prethodnim saznanjima. Matematička formulacija takvog ažuriranja temelji se na uvjetnim vjerojatnostima i izražava se Bayesovim teoremom [5]:

$$\pi(z | d) = \frac{\pi(d | z)\pi(z)}{\int \pi(d | z)\pi(z) dz}. \quad (8)$$

$\pi(d | z)$ predstavlja funkciju vjerojatnosti (likelihood) koja određuje vjerojatnost dobivanja promatrane vrijednosti mjerenja d za zadanu vrijednost parametra z . Ova funkcija može se definirati kao vjerojatnost da pogreška ϵ poprimi vrijednost $d - y$, gdje je $y = G(z)$ točna vrijednost mjerenja dobivena iz "forward" modela. Pod pretpostavkom međusobne neovisnosti svih elemenata pogreške ϵ , funkcija vjerojatnosti izražava se kao umnožak distribucija pojedinačnih komponenti:

$$\pi(d | z) = \prod_{i=1}^{n_d} \pi_{\epsilon_i}(d_i - y_i(z)). \quad (9)$$

Nazivnik u Bayesovom teoremu predstavlja marginalnu vjerojatnost (evidence ili funkciju dokaza), odnosno normalizacijsku konstantu koja osigurava da se posteriorna distribucija integrira na jedinicu. Konačni izraz $\pi(z | d)$ označava posteriornu distribuciju vrijednosti parametra z , što predstavlja ažurirano razumijevanje distribucije parametra nakon uključivanja mjerenja d [48].

2.2.2 MCMC i Kalman filter metoda za aproksimaciju rješenja

Općenito, posteriorna distribucija $\pi(z | d)$ ne može se izraziti u eksplicitnom, zatvorenom obliku. Za aproksimaciju posteriorne distribucije traženih parametara najčešće se primjenjuju metode Markovljevih lanaca Monte Carlo (MCMC) te Kalmanov filter [5].

MCMC je statistička metoda uzorkovanja koja kombinira Monte Carlo simulacije i Markovljeve lance. Najpoznatiji i najčešće korišteni algoritam unutar MCMC-a je Metropolis-Hastingsov algoritam slučajnog hoda, koji omogućuje uzorkovanje iz posteriorne distribucije generiranjem novog kandidatskog uzorka z^* iz distribucije prijedloga $q(z^* | z^{(j)})$ [49]. Ova distribucija prijedloga obično je jednostavna i poznata, najčešće normalna simetrična (Gaussova) distribucija oko trenutnog uzorka $z^{(j)}$, te služi za predlaganje sljedeće točke u prostoru parametara na temelju trenutnog stanja lanca [46, 48]:

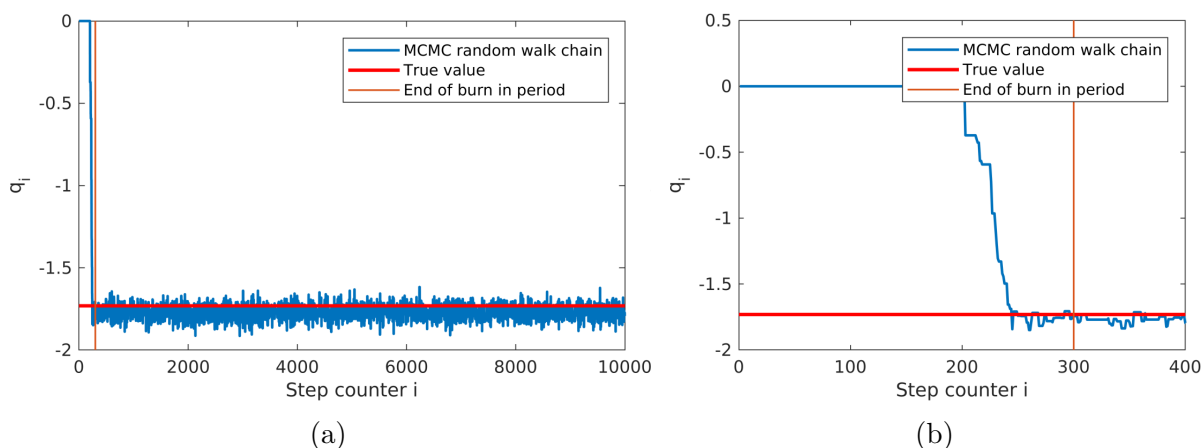
$$z^* \sim \mathcal{N}(z^{(j)}, \sigma_p^2 I). \quad (10)$$

Algoritam započinje od početne točke $z^{(0)}$, koja se najčešće uzima kao očekivana vrijednost prior distribucije $\pi(z)$. U svakom koraku j predlaže se nova kandidatska točka z^* iz prijedložene distribucije. Distribucija prijedloga $q(z^* | z)$ mora imati strogo pozitivnu funkciju gustoće u cijelom prostoru uzorka za koji je definirana posteriorna distribucija. Za svaki novi prijedlog

izračunava se omjer prihvatanja [5, 50]:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(d | z^*)}{\pi(d | z^{(j)})} \right\}. \quad (11)$$

Kandidatski uzorak z^* uvijek se prihvaća ako vodi prema području veće gustoće vjerojatnosti ($\pi(d | z^*) > \pi(d | z^{(j)})$). U suprotnom slučaju, prihvaća se s vjerojatnošću α . U praksi se generira uniformni slučajni broj $r \sim U[0, 1]$. Ako je $\alpha \geq r$, predloženi uzorak z^* se prihvaća ($z^{(j+1)} = z^*$); inače se odbacuje i lanac ostaje na prethodnoj točki ($z^{(j+1)} = z^{(j)}$). Odabirom uže distribucije prijedloga $q(z^* | z^{(j)})$ nastaju manji koraci između uzastopnih vrijednosti u Markovljevom lancu, što uzrokuje sporiji proces identifikacije. Nasuprot tome, šira distribucija omogućuje prihvatanje većeg broja rješenja koja ne pripadaju ciljanoj posteriornoj distribuciji, što dovodi do manje precizne aproksimacije nepoznatih parametara [48, 51].



Slika 4: a) Posteriorni uzorci MCMC lanca slučajnog hoda [48], b) Početni dio lanca za prikaz burn-in perioda [48].

Slika 4a prikazuje tipičan tijek MCMC lanca generiranog Metropolis-Hastings algoritmom. Na slici 4b prikazan je početni segment lanca, odnosno burn-in period, u kojem je utjecaj početnog uzorka na ponašanje lanca jasno izražen. Kako lanac napreduje prema području visoke vjerojatnosti posteriorne distribucije, fluktuacije postaju nasumične i lanac poprima karakteristike bijelog šuma. To ukazuje na postizanje stacionarne distribucije, pri čemu su uzorci reprezentativni za ciljano posteriornu distribuciju. Prvi segment uzoraka (burn-in period) se stoga uobičajeno odbacuje jer još nije reprezentativan. Za veću učinkovitost i bržu konvergenciju koristi se paralelizirana implementacija s više neovisnih lanaca istovremeno [48].

Najveći računski teret MCMC postupka predstavlja evaluacija funkcije vjerojatnosti u svakom koraku slučajnog hoda. Za izračun omjera prihvatanja α , pri svakoj novoj kandidatskoj vrijednosti z^* potrebno je evaluirati forward model $G(z)$ i dobiti odgovarajući predviđeni odgovor. Kod računalno zahtjevnih modela ovaj korak postaje izuzetno skup i vremenski neizvediv. Zbog toga se deterministički forward model često zamjenjuje računalno jeftinijim surogatnim modelima koji omogućuju brzu procjenu vjerojatnosti [46].

Druga široko primjenjivana i računski često učinkovitija metoda za određivanje posteriorne distribucije je Kalmanov filter [52]. Dok MCMC metoda dobiva posteriornu distribuciju $\pi(z | d)$ uzorkovanjem, Kalmanov filter omogućuje izravan i rekurzivan pristup rješavanju Bayesovog teorema. Kalmanov filter temelji se na pretpostavci da su priorna distribucija i šum Gaussovi, a forward model linearan, što rezultira Gaussovom posteriornom distribucijom. U tom slučaju, posteriorna distribucija je u potpunosti određena srednjom vrijednošću i kovarijancnom matricom. Ova svojstva omogućuju filtru da precizno izračuna posteriornu distribuciju bez potrebe za uzorkovanjem, čime se značajno povećava učinkovitost identifikacije nepoznatih parametara. Kalmanov filter djeluje rekurzivno, pri čemu za svaki novi korak koristi samo prethodnu procjenu i novo mjerenje, pa nije potrebno pohranjivati cijelu povijest podataka. Ovakav pristup smanjuje

memorijsku i računalnu složenost, što ovu metodu čini posebno pogodnom za obradu mjerenja u stvarnom vremenu [5, 53].

Ovaj proces sastoji se od dva jasno definirana koraka. Prvi je korak predviđanja, u kojem se na temelju najbolje procjene stanja iz prethodnog koraka i forward modela izračunava predviđena vrijednost nepoznatog parametra z^f te pripadajuća kovarijancna matrica $\text{Cov}^f(z)$, koja kvantificira razinu neizvjesnosti u predikciji. Uvođenjem novog mjerenja d , primjerice izmjenjenog pomaka konstrukcije ili deformacije, prelazi se u korak ažuriranja. U ovom koraku predviđena vrijednost kombinira se s novim mjerenjem, čime se dobiva poboljšana procjena parametra [5, 52]:

$$z^a = z^f + K(d - G(z^f)). \quad (12)$$

U navedenoj jednadžbi, z^a označava ažuriranu vrijednost parametra nakon uzimanja u obzir novog mjerenja. Veličina $d - G(z^f)$ predstavlja razliku između stvarno izmjerenih vrijednosti i onih koje je model predvidio. Kalmanov faktor K određuje težinu pridodanu novom mjerenju u odnosu na prethodnu predikciju te se računa prema sljedećem izrazu [52, 54]:

$$K = \text{Cov}^f(z) G^T (G \text{Cov}^f(z) G^T + \text{Cov}(\epsilon))^{-1}. \quad (13)$$

U ovom izrazu, $G(z)$ predstavlja forward model, primjerice FEM ili rešetkasti modeli, dok $\text{Cov}(\epsilon)$ označava kovarijancnu matricu pogreške mjerenja. Nakon ažuriranja stanja, ažurira se i kovarijancna matrica analiziranog stanja:

$$\text{Cov}^a(z) = (I - KG) \text{Cov}^f(z). \quad (14)$$

Varijabla z^a ima Gaussovu distribuciju, a njezina posterior distribucija definirana je srednjom vrijednošću i kovarijancnom matricom. Za linearne sustave, Kalmanov filter pruža točnu Gaussovu posteriornu distribuciju. Međutim, većina inženjerskih problema, uključujući simulacije loma materijala, nije linearna, zbog čega se eksplicitni izraz kovarijance ne može izračunati. Stoga su razvijene proširene varijante filtra.

Ansambl Kalmanov filter predstavlja najčešće korištenu praktičnu varijantu za rješavanje nelinearnih problema. Ova metoda zadržava osnovni oblik filtra, ali umjesto izravnog računanja kovarijance koristi Monte Carlo uzorke (ansamble) predviđenih stanja [5, 52, 54]. Kovarijance se aproksimiraju statističkim prosjekom ansambla, a ažuriranje se provodi za svakog člana ansambla zasebno. Ovakav pristup zahtijeva veći broj uzoraka, što podrazumijeva višestruku evaluaciju determinističkog forward modela i povećava računsku zahtjevu. U takvim slučajevima, forward model se često zamjenjuje surogatnim modelima koji značajno smanjuju računski trošak. Jedan od najučinkovitijih surogatnih pristupa je predstavljanje svih slučajnih parametara i odgovora modela u obliku proširenja polinomijalnog kaosa (PCE), čime se dobiva takozvani PCE-Kalmanov filter [46]. U ovoj varijanti, ažuriranje posteriorne distribucije svodi se na algebarsku operaciju nad PCE koeficijentima, bez potrebe za Monte Carlo uzorkovanjem. PCE-Kalmanov filter izuzetno je brz i računski vrlo učinkovit, što ga čini posebno pogodnim za velike numeričke simulacije.

2.2.3 Surogat modeli

Identifikacija nepoznatih parametara u složenim procesima, uključujući procese loma, oštećenja, često je izuzetno računski zahtjevna. Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, ponovljena evaluacija determinističkog forward modela $G(z)$ u svakom koraku MCMC metode ili Ansambl Kalmanovog filtera predstavlja glavni izazov Bayesovog inverznog postupka [55]. Svaka nova kandidatska vrijednost parametra zahtijeva potpuno rješavanje numeričkog modela, što dovodi do nepraktično dugog vremena izračuna i otežava identifikaciju parametara. Kako bi se taj problem ublažio, umjesto skupih determinističkih modela primjenjuju se surogatni (proxy) modeli koji brzo i dovoljno precizno aproksimiraju odnos između ulaznih parametara z i izlazne veličine y . Jedan od najučinkovitijih i najčešće korištenih surogat pristupa u stohastičkim analizama je

generalizirano proširenje polinomijalnog kaosa (gPCE) [41, 46, 48]. gPCE aproksimira forward operator kao linearnu kombinaciju odabranih ortogonalnih polinoma i pripadajućih koeficijenata [5]:

$$\mathbf{y}(z) = G(z) \approx \hat{\mathbf{y}}(z) = \sum_{k=0}^{K-1} v_k \Phi_k(z). \quad (15)$$

U ovoj formulaciji, $\Phi_k(z)$ predstavljaju ortogonalne polinomijalne bazne funkcije odabrane prema priornoj distribuciji parametara z , dok vektor $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{K-1}]^T$ sadrži sve polinomijalne koeficijente. Za uniformnu priornu distribuciju, koja se često pretpostavlja u odsustvu prethodnog znanja o parametrima, koriste se Legendreovi polinomi. Za Gaussovu priornu distribuciju koriste se Hermiteovi polinomi kao bazne funkcije. Stupanj polinoma p_{gpc} određuje ukupan broj članova K u aproksimaciji i predstavlja kompromis između točnosti i računске složenosti. Ortogonalnost polinoma s obzirom na vjerojatnosnu mjeru omogućuje jednostavnu i stabilnu konstrukciju modela te izravno računanje osjetljivosti iz koeficijenata [48, 56].

Najčešći način određivanja koeficijenata polinoma temelji se na regresijskom pristupu. U ovom postupku generira se veći broj uzoraka ulaznih parametara z primjenom Quasi-Monte Carlo (QMC) uzorkovanja [57]. Ova metoda omogućuje ravnomjernu raspodjelu uzoraka u prostoru parametara uz znatno manji broj točaka u odnosu na klasično Monte Carlo uzorkovanje. Dobiveni uzorci zatim se dijele na dva skupa: N_{pod} točaka za konstrukciju (podešavajući skup) i N_{val} točaka za provjeru kvalitete (validacijski skup) surogat modela. Za svaku točku iz podešavajućeg skupa deterministički solver se pokreće jednom, čime se dobiva izlazna veličina $\mathbf{y}(z_j)$. Na istim točkama evaluiraju se sve bazne polinomijalne funkcije $\Phi_k(z_j)$, čime se formira matrica Ψ , gdje redovi odgovaraju uzorcima, a stupci baznim funkcijama. Koeficijenti se određuju rješavanjem problema najmanjih kvadrata [5, 56]:

$$\mathbf{v} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{Y}_{\text{pod}}, \quad (16)$$

gdje je \mathbf{Y}_{pod} matrica izlaznih vrijednosti na podešavajućim točkama. Ovaj pristup minimizira pogrešku između stvarnih izlaznih veličina i gPCE aproksimacije. Kvaliteta gPCE modela procjenjuje se na zasebnom skupu validacijskih točaka koje nisu korištene tijekom konstrukcije modela. Najčešće korištena mjera je srednja kvadratna pogreška (MSE):

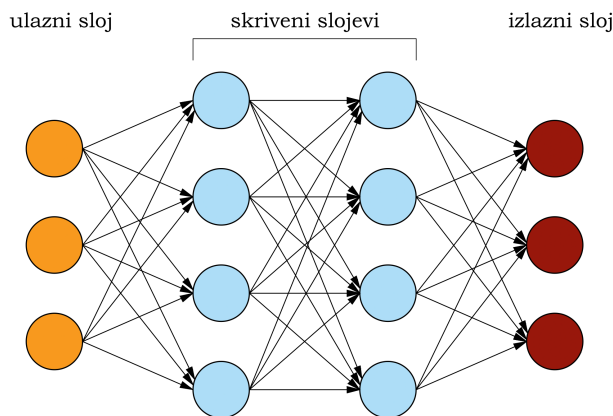
$$\text{MSE} = \frac{1}{N_{\text{fit}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{fit}}} \|\mathbf{y}(z_j) - \hat{\mathbf{y}}(z_j)\|^2. \quad (17)$$

Niska vrijednost MSE ukazuje na visoku kvalitetu surogatnog modela i njegovu pouzdanost kao zamjene za originalni forward model.

gPCE surogatni modeli predstavljaju učinkovit alat za primjenu Bayesove inverzne metode na velikim i računski zahtjevnim numeričkim modelima. Kombinacija gPCE surogata s MCMC metodom ili Ansambl Kalman filterom omogućuje značajno ubrzanje identifikacije parametara. Točnost surogata može se regulirati odabirom polinomijalnog stupnja i brojem točaka za podešavanje i validaciju [41]. Dodatna prednost je mogućnost izravnog izračuna osjetljivosti iz koeficijenata bez dodatnih simulacija, što je detaljno opisano u poglavlju 2.2.4. U vrlo složenim simulacijama, poput simulacija loma ili oštećenja materijala, gPCE modeli pokazuju određena ograničenja. Visoki stupnjevi polinoma mogu uzrokovati neželjeno ekstrapolacijsko ponašanje i nestabilnost između točaka uzorkovanja. U takvim slučajevima sve se češće primjenjuju neuronske mreže (NN) [58], a posebno fizikom informirane neuronske mreže (PINN), kao prikladniji surogatni modeli [59].

Neuronske mreže su računski modeli koji obrađuju podatke kroz slojevitou strukturu koristeći aproksimacijske algoritme. Sastoje se od međusobno povezanih umjetnih neurona organiziranih u ulazni sloj, jedan ili više skrivenih slojeva te izlazni sloj (prikazano na slici 5).

Svaki neuron u sloju prima signale iz prethodnog sloja, množi ih odgovarajućim težinama, dodaje pristranost i primjenjuje aktivacijsku funkciju [60, 61]. Funkcioniranje neuronske mreže



Slika 5: Struktura Neuronske mreže

može se općenito opisati na sljedeći način. Ulazni sloj odgovara vektoru nepoznatih parametara z , odnosno $x^0 = z$. U svakom sloju l , neuron j izračunava težinsku sumu izlaza iz prethodnog sloja [58, 60, 62]:

$$\hat{y}_j^l = \sum_{i=1}^{n^{l-1}} w_{ij}^l x_i^{l-1} + b_j^l. \quad (18)$$

Ovdje su w_{ij}^l , težine povezivanja slojeva neuronske mreže, dok su b_j^l „vrijednosti pristranosti slojeva. Nakon toga primjenjuje se aktivacijska funkcija $g(\cdot)$:

$$x_j^l = g(\hat{y}_j^l). \quad (19)$$

Ovaj se postupak ponavlja kroz sve slojeve do izlaznog sloja, gdje se dobiva aproksimirana izlazna veličina:

$$\mathbf{y}(z) = G(z) \approx \hat{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{x}^L(z). \quad (20)$$

Tako dobivena mreža predstavlja surogatni model $\hat{G}(z)$. Konstrukcija svake neuronske mreže obuhvaća dvije faze. Prva faza uključuje proces treniranja ili učenja, pri čemu se sve težine i parametri mreže inicijaliziraju nasumično. Treniranje se provodi nadziranom učenjem na skupu podataka koji sadrži ulazno-izlazne parove prethodno izračunate determinističkim solverom. Cilj je minimizirati funkciju gubitka između predviđenih i stvarnih izlaza. Proces započinje prolazom unaprijed (forward propagation) kroz mrežu, definiran jednadžbama (18), (19) i (20). Tijekom tog prolaza mreža izračunava izlaz i pogrešku u odnosu na željeni rezultat. Slijedi povratni prolaz (back-propagation), tijekom kojeg mreža koristi lančano pravilo deriviranja za izračun doprinosa svake pojedinačne težine i pristranosti ukupnoj pogrešci. Na temelju izračunatog gradijenta, težine i pristranosti ažuriraju se u smjeru smanjenja pogreške. Cijeli ciklus ponavlja se kroz više iteracija dok pogreška ne postane dovoljno mala [60, 63].

Druga faza obuhvaća testiranje ili validaciju mreže, što omogućuje objektivnu procjenu njezine kvalitete. Za razliku od procesa treniranja, u ovoj fazi težine i pristranosti ostaju fiksirane na vrijednostima dobivenim tijekom učenja. Mreži se tada predstavljaju novi, prethodno neviđeni ulazni vektori, a očekuje se da za te ulaze generira odgovarajuće izlaze bez dodatnog učenja. Procjena se provodi izračunavanjem pogreške ili drugog mjerila točnosti, primjerice srednje kvadratne pogreške, pri čemu se predviđeni izlazi uspoređuju sa stvarnim referentnim vrijednostima [62].

U usporedbi s gPCE modelima, neuronske mreže pružaju znatno veću fleksibilnost u modeliranju nelinearnih ponašanja, što ih čini prikladnijima za složene simulacije loma i oštećenja [58]. Međutim, njihova obuka je iterativna i računski zahtjevnija, a modeli su manje interpretabilni jer djeluju kao „crna kutija“. Kao odgovor na ove izazove, razvijaju se fizikom informirane neuronske mreže koje kombiniraju prednosti klasičnih neuronskih mreža s ugrađenim fizikalnim ograničenjima te predstavljaju sljedeći korak u razvoju surogatnih modela .

Neuronske mreže mogu generirati fizički nekonzistentne predikcije za situacije izvan područja skupa na kojima su trenirane. Fizikom informirane neuronske mreže (PINN) rješavaju ovaj problem integracijom fizikalnih zakona sustava, uključujući diferencijalne jednadžbe te rubne i početne uvjete, izravno u proces učenja [59, 64].

PINN predstavlja klasičnu neuronsku mrežu koja aproksimira rješenje problema pomoću parametara mreže θ (težine i pristranost). Ključna razlika nalazi se u funkciji gubitka kojom se mreža trenira. Dok klasična neuronska mreža minimizira samo pogrešku na dostupnim podacima ($\mathcal{L}_{\text{data}}$), PINN dodatno minimizira fizikalni rezidual, odnosno odstupanje od diferencijalnih jednadžbi koje opisuju problem, kao što su jednadžbe ravnoteže, kontinuiteta, Hookeov zakon, kriteriji loma i druge. Ukupna funkcija gubitka za PINN definira se kao [65]:

$$\mathcal{L}(\theta) = \lambda_{\text{data}}\mathcal{L}_{\text{data}}(\theta) + \lambda_{\text{physics}}\mathcal{L}_{\text{physics}}(\theta) + \lambda_{\text{BC/IC}}\mathcal{L}_{\text{BC/IC}}(\theta), \quad (21)$$

gdje $\mathcal{L}_{\text{data}}$ predstavlja standardnu pogrešku između predviđenih i stvarnih izlaza na dostupnim mjerenjima, $\mathcal{L}_{\text{physics}}$ označava fizikalni rezidual, odnosno pogrešku kojom mreža zadovoljava temeljne diferencijalne jednadžbe problema, dok $\mathcal{L}_{\text{BC/IC}}$ označava pogrešku na rubnim i početnim uvjetima. Koeficijenti λ omogućuju uravnoteženje između doprinosa podataka i fizike. Na taj način PINN istovremeno uči iz eksperimentalnih podataka ili simulacija te iz fizikalnih zakona.

PINN surogatni modeli zahtijevaju znatno manje podataka za treniranje u odnosu na klasične neuronske mreže, bolje generaliziraju izvan područja na kojem su trenirani i omogućuju fizički konzistentne predikcije čak i u odsutnosti mjerenja [59]. Fizikom informirane mreže predstavljaju značajan napredak u odnosu na klasične neuronske mreže, ali i dalje imaju nekoliko važnih ograničenja. Jedno od tih ograničenja odnosi se na funkciju gubitka, koja je višekomponentna i često može biti kruta, što može uzrokovati nestabilno treniranje, nestanak gradijenta ili vrlo sporu konvergenciju. PINN modeli također pokazuju izraženu spektralnu pristranost jer prvenstveno uče niske frekvencije, dok visokofrekventne komponente usvajaju vrlo sporo. Ograničenje PINN modela je i njihova visoka osjetljivost na izbor težinskih koeficijenata λ , a njihovo međusobno uravnoteženje može biti zahtjevno te često zahtijeva ručno podešavanje. Razvijene su brojne tehnike za ublažavanje ovih nedostataka, uključujući adaptivno ponderiranje, podjelu područja na više manjih PINN modela i postupno uvođenje složenijih fizikalnih uvjeta tijekom treninga.

2.2.4 Analiza osjetljivosti parametara

Nakon izgradnje surogatnog modela, bilo gPCE ili neuronske mreže, nužno je kvantitativno procijeniti utjecaj pojedinih ulaznih parametara na izlaznu veličinu modela ili mjerenja. U tu svrhu primjenjuje se analiza osjetljivosti, koja identificira parametre s najvećim doprinosom varijabilnosti izlaza, parametre koji djeluju neovisno te one koji pokazuju značajne interakcije s ostalima. Najčešće korištena metoda u ovom kontekstu je Sobolova analiza osjetljivosti [66]. Sobolovi indeksi omogućuju preciznu procjenu doprinosa pojedinačnih parametara i njihovih kombinacija ukupnoj varijanci izlazne veličine \mathbf{y} . Ova analiza ima značajnu praktičnu vrijednost jer olakšava dizajn eksperimenta, optimalno postavljanje senzora i identifikaciju najutjecajnijih parametara.

Sobolovi indeksi predstavljaju relativnu mjeru koja prikazuje udio parcijalne varijance, povezane s varijacijom određenog podskupa ulaznih parametara, u ukupnoj varijanci izlazne veličine. Prvoredni Sobolov indeks S_i obuhvaća osjetljivost na pojedini parametar, dok drugoredni indeks $S_{i,j}$ odražava interakcije između dva parametra. Definirani su kao [66, 67]:

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{\text{var}_{z_i}(\mathbb{E}_{z_{-i}}[\mathbf{y}|z_i])}{\text{var}(\mathbf{y})}, \quad S_{i,j} = \frac{V_{i,j}}{V} = \frac{\text{var}_{z_i,z_j}(\mathbb{E}_{z_{-i,j}}[\mathbf{y}|z_i,z_j])}{\text{var}(\mathbf{y})}, \quad (22)$$

gdje je V ukupna varijanca izlaza, a V_i i $V_{i,j}$ parcijalne varijance.

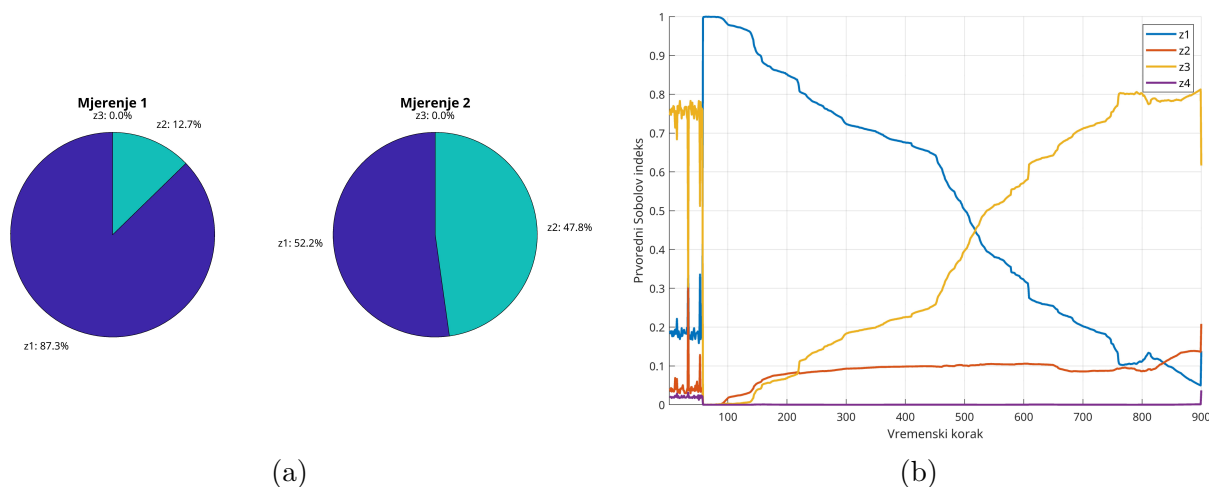
Za gPCE modele, Sobolovi indeksi mogu se izračunati analitički i izravno iz koeficijenata polinoma, bez potrebe za dodatnim simulacijama. Zbog ortogonalnosti polinoma, parcijalne

varijance određuju se zbrajanjem kvadrata odgovarajućih koeficijenata [48, 66]:

$$V_{i_1, \dots, i_s} = \text{var} \left(\sum_{\alpha \in J_{i_1, \dots, i_s}} v_\alpha \Phi_\alpha(z_{i_1}, \dots, z_{i_s}) \right) = \sum_{\alpha \in J_{i_1, \dots, i_s}} v_\alpha^2 \gamma_\alpha, \quad (23)$$

gdje je J_{i_1, \dots, i_s} označava skup multi-indeksa polinoma koji ovise isključivo o parametrima z_{i_1}, \dots, z_{i_s} , dok γ_α predstavlja normu baznog polinoma.

Na Slici 6, prikazani su prvoredni Sobolovi indeksi osjetljivosti parametara dobiveni iz gPCE surogatnog modela. Slika 6a prikazuje prvoredne Sobolove indekse za dva različita mjerenja u jednom vremenskom koraku, čime je jasno vidljiv relativni udio doprinosa svakog ulaznog parametra z_i na promatrano mjerenje. Slika 6b prikazuje vremensku evoluciju prvorednih Sobolovih indeksa za jedno mjerenje kroz više vremenskih koraka, ilustrirajući kako se utjecaj pojedinih parametara mijenja tijekom procesa simulacije.



Slika 6: Prvoredni Sobolovi indeksi a) Prikaz Sobolovih indeksa za dva različita mjerenja u jednom vremenskom koraku, b) Prikaz Sobolovih indeksa za jedno mjerenje u vremenu

Za NN ili PINN surogatne modele situacija je različita jer neuronske mreže nemaju zatvorenu analitičku formu. U tom slučaju, Sobolovi indeksi izračunavaju se numerički pomoću Monte Carlo uzorkovanja, najčešće Saltelli metodom ili njezinim varijantama [68]. Ovaj pristup zahtijeva veći broj evaluacija mreže, ali je i dalje znatno brži od evaluacije punog FEM ili rešetkastog modela. Alternativno, mogu se primijeniti i druge tehnike, primjerice analiza osjetljivosti temeljena na gradijentu.

Sobolova analiza omogućuje uvid u mjerenja prikazivanjem utjecaja pojedinog parametra na odabrano mjerenje prije provođenja Bayesove identifikacije [41, 58].

3. Smjernice daljnjeg istraživanja

Planirano istraživanje, koje će predstavljati temelj doktorske disertacije, usmjereno je na daljnji razvoj i optimizaciju rešetkastih (lattice) modela grednih elemenata primjenom Bayesove stohastičke identifikacije parametara. Primarni cilj je postići visoku razinu točnosti i pouzdanosti simulacija loma kvazi-krhkih materijala, kako u linearnom elastičnom području, tako i u nelinearnom području koje uključuje otvaranje i propagaciju pukotina.

Prva faza istraživanja bit će usmjerena na kalibraciju rešetkastih modela u linearnom elastičnom području. U ovoj fazi uvode se korekcijski koeficijenti s ciljem uklanjanja ključnih ograničenja modela, posebno neadekvatnog reproduciranja Poissonovog efekta i bočnih deformacija. Identifikacija ovih koeficijenata provodit će se integracijom diskretnog rešetkastog modela s Bayesovom inverznom metodom. Za rješavanje Bayesovog teorema primjenjivat će se Markovljevi lanci Monte Carlo (MCMC) uz podršku gPCE surogatnih modela, čime se značajno smanjuje računski teret. Istovremeno će se provoditi analiza osjetljivosti pomoću Sobolovih indeksa radi identifikacije

najutjecajnijih parametara i njihovih međusobnih interakcija. Kalibracija rešetkastih modela temeljit će se na osnovnim mehaničkim ispitivanjima, pri čemu će referentna rješenja biti dobivena iz preciznih kontinuumskih modela temeljenih na metodi konačnih elemenata.

Nakon uspješne kalibracije i poboljšanja linearnog ponašanja rešetkastih modela, istraživanje će biti usmjereno na identifikaciju nelinearnih parametara loma, uključujući granične čvrstoće u vlaklu, tlaku i posmiku te pripadajuće energije loma. S obzirom na povećanu složenost problema i visoke računske zahtjeve, uz gPCE modele bit će primijenjeni i napredniji surogatni modeli, poput klasičnih neuronskih mreža i posebno fizikom informiranih neuronskih mreža (PINN). PINN modeli će se istražiti ne samo kao klasični surogati, već i kao potencijal za izravnu integraciju u Bayesov okvir za rješavanje Bayesovog teorema bez potrebe za metodama uzorkovanja, čime se omogućuje razvoj učinkovitijih i fizikalno konzistentnijih stohastičkih simulacija.

Sve metode i algoritmi najprije će biti razvijeni i testirani na dvodimenzionalnim (2D) modelima, gdje je računaska složenost manja, a validacija jednostavnija. Nakon provjere i optimizacije pristupa, istraživanje će biti prošireno na trodimenzionalne (3D) rešetkaste modele. U ovoj fazi cilj je potpuna identifikacija svih parametara loma, uključujući sva tri lomna moda i pripadajuće energije loma, kako bi se razvio novi prostorni rešetkasti model raspucavanja sa poboljšanom simulacijom prostornog sloma u kvazi-krhkim materijalima.

Očekuje se da će predloženi pristup omogućiti razvoj probabilistički pouzdanih, računski učinkovitih i fizikalno konzistentnih rešetkastih modela, primjenjivih na širok spektar inženjerskih problema. Time će se ostvariti značajan doprinos preciznijem predviđanju ponašanja kvazi-krhkog materijala korištenjem diskretnih rešetkastih modela.

Zahvala

Ovo istraživanje podržano je projektom 'Metodologija za procjenu parametara u problemima propagacije pukotina nastalih pod utjecajem ekstremnih mehaničkih opterećenja' (HRZZ-UIP-2020-02-6693) i projektom 'Projekt razvoja karijera mladih istraživača – izobrazba novih doktora znanosti' (DOK-NPOO-2023-10-8014), koji financira Hrvatska zaklada za znanost.

Literatura

- [1] A.L. Saleh i M.H. Aliabadi. „Crack growth analysis in concrete using boundary element method”. *Engineering Fracture Mechanics* 51(4) (1995.), str. 533–545. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00301-W](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00301-W).
- [2] A. Ibrahimbegovic. *Nonlinear solid mechanics: theoretical formulations and finite element solution methods Vol. 160*. Springer Science i Business Media, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2331-5>.
- [3] M. Nikolić, E. Karavelić, A. Ibrahimbegovic i P. Mišćević. „Lattice Element Models and Their Peculiarities”. *Archives of Computational Methods in Engineering* 25 (2018.), str. 753–784. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9210-y>.
- [4] J. E. Bolander, J. Eliáš, G. Cusatis i K. Nagai. „Discrete mechanical models of concrete fracture”. *Engineering Fracture Mechanics* 257, 108030 (2021.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108030>.
- [5] D. Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010. DOI: <https://dl.acm.org/doi/10.5555/1893088>.
- [6] H. G. Matthies, E. Zander, B. V. Rosić, A. Litvinenko i O. Pajonk. „Inverse Problems in a Bayesian Setting”. *Computational Methods for Solids and Fluids: Multiscale Analysis. Cham: Springer International* (2016.), str. 245–286. DOI: doi.org/10.1007/978-3-319-27996-1_10.
- [7] X. Liu, H. Zhang i S. Luo. „Size effect model with competing mechanism for quasi-brittle materials under uniaxial compression”. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 175, 105686 (2024.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2024.105686>.

- [8] L. Cedolin, S. Dei Poli i I. Iori. „Experimental determination of the fracture process zone in concrete”. *Cement and Concrete Research* 13(4) (1983.), str. 557–567. DOI: [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(83\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(83)90015-7).
- [9] A. Hillerborg, M. Mod er i P.-E. Petersson. „Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”. *Cement and Concrete Research* 6(6) (1976.), str. 773–781. DOI: [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7).
- [10] F.H. Wittmann. „Structure of Concrete and Crack Formation”. *Fracture of Non-Metallic Materials* (1987.), str. 309–340. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-4784-9_15.
- [11] Z. Qian, E. Schlangen, G. Ye i K. Van Breugel. „Modeling Framework for Fracture in Multiscale Cement-Based Material Structures”. *Materials* 10(6), 567 (2017.). DOI: <https://doi.org/10.3390/ma10060587>.
- [12] H. Altenbach, M. Br nig i Z. L. Kowalewski. *Plasticity, Damage and fracture in advanced materials*. Cham: Springer International Publishing, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34851-9>.
- [13] M. Nikolić, T. Roje-Bonacc i A. Ibrahimbegović. „Overview of the numerical methods for the modelling of rock mechanics problems”. *Tehnički vjesnik* 23(2) (2016.), str. 627–637. DOI: <https://doi.org/10.17559/TV-20140521084228>.
- [14] A. Lisjak i G. Grasselli. „A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses”. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* 6(4) (2014.), str. 301–314. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2013.12.007>.
- [15] N. Guo i J. Zhao. „A coupled FEM/DEM approach for hierarchical multiscale modelling of granular media”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 99(11) (2014.), str. 789–818. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.4702>.
- [16] Z. P. Bažant, T. B. Belytschko i T. P. Chang. „Continuum Theory for Strain-Softening”. *Journal of Engineering Mechanics* 110(12) (1994.), str. 1666–1692. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1994\)110:12\(1666\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)110:12(1666)).
- [17] A. Needleman. „Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67(1) (1988.), str. 69–85. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90069-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90069-2).
- [18] L. F. Friedrich, I. Iturrioz, A. B. Colpo i S. Vantadori. „Fracture failure of quasi-brittle materials by a novel peridynamic model”. *Composite Structures* 323, 117402 (2023.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117402>.
- [19] J. C. Simo, J. Oliver i F. Armero. „An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, Computational Mechanics”. *Computational Mechanics* 12 (1993.), str. 277–296. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00372173>.
- [20] N. Moës, J. Dolbow i T. Belytschko. „A finite element method for crack growth without remeshing”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(1) (1999.), str. 131–150. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1%3C131::AID-NME726%3E3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1%3C131::AID-NME726%3E3.0.CO;2-J).
- [21] J. Oliver, A.E. Huespe i P.J. Sánchez. „A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM”. *Computational Mechanics* 195(37-40) (2006.), str. 4732–4752. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.09.020>.
- [22] N. Moës i T. Belytschko. „Extended finite element method for cohesive crack growth”. *Engineering Fracture Mechanics* 69(7) (2002.), str. 813–833. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00128-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X).
- [23] C. Linder i F. Armero. „Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72(12) (2007.), str. 1391–1433. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2042>.

- [24] A. Stanić, B. Brank i D. Brancherie. „Fracture of quasi-brittle solids by continuum and discrete-crack damage models and embedded discontinuity formulation”. *Engineering Fracture Mechanics* 227, 106924 (2020.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106924>.
- [25] M. Šodan, A. Stanić i M. Nikolić. „Enhanced solid element model with embedded strong discontinuity for representation of mesoscale quasi-brittle failure”. *International Journal of Fracture* 248 (2024.), str. 1–25. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-024-00797-0>.
- [26] N. Bićanić. *Discrete Element Methods*. Encyclopedia of computational mechanics, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470091355.ecm006.pub2>.
- [27] E. Siegmann, S. Enzinger, P. Toson, P. Doshi, J. Khinast i D. Jajcevic. „Massively speeding up DEM simulations of continuous processes using a DEM extrapolation”. *Powder Technology* 390 (2021.), str. 442–455. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.05.067>.
- [28] E. Schlangen i J. G. M. van Mier. „Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures”. *Materials and Structures* 25 (1992.), str. 534–542. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02472449>.
- [29] E. Schlangen i E.J. Garboczi. „New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice”. *International Journal of Engineering Science* 34(10) (1992.), str. 1131–1144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(96\)00019-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(96)00019-5).
- [30] M. Nikolic i Adnan Ibrahimbegovic. „Rock mechanics model capable of representing initial heterogeneities and full set of 3D failure mechanis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 290 (2015.), str. 209–227. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.024>.
- [31] E. Karavelić, M. Nikolić, A. Ibrahimbegovic i A. Kurtović. „Concrete meso-scale model with full set of 3D failure modes with random distribution of aggregate and cement phase. Part I: Formulation and numerical implementation”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 344 (2019.), str. 1051–1072. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.013>.
- [32] D. Asahina, K. Ito, J.E. Houseworth, J.T. Birkholzer i J.E. Bolander. „Simulating the Poisson effect in lattice models of elastic continua”. *Computers and Geotechnics* 70 (2015.), str. 60–67. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.07.013>.
- [33] J.E. Bolander Jr. i S. Saito. „Fracture analyses using spring networks with random geometry”. *Computers and Geotechnics* 61(5-6) (1998.), str. 569–591. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00069-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00069-1).
- [34] G. Cusatis, D. Pelessone i A. Mencarelli. „Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. I: Theory”. *Cement and Concrete Composites* 33(9) (2011.), str. 881–890. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2011.02.011>.
- [35] Ž. Nikolić, N. Živaljić, H. Smoljanović i Ivan Balić. „Numerical modelling of reinforced-concrete structures under seismic loading based on the finite element method with discrete inter-element cracks”. *Earthquake engineering and structural dynamics* 46(1) (2016.), str. 159–178. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2780>.
- [36] O. A. Bauchau i J. I. Craig. *Structural Analysis With Applications to Aerospace Structures*. Springer Dordrecht, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-90-481-2516-6>.
- [37] S. P. Timoshenko. „LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41(245) (1921.), str. 744–746. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>.
- [38] M. Ostoja-Starzewski. „Lattice models in micromechanics”. *Applied Mechanics Reviews* 55(1) (2002.), str. 35–60. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1432990>.
- [39] P. J. Green i R. Sibson. „Computing Dirichlet Tessellations in the Plane”. *The Computer Journal* 21(2) (1978.), str. 168–173. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/21.2.168>.

- [40] M. Nikolic, A. Ibrahimbegovic i P. Miscevic. „Brittle and ductile failure of rocks: Embedded discontinuity approach for representing mode I and mode II failure mechanisms”. *The International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102(8) (2015.), str. 1507–1526. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.4866>.
- [41] D. Pavić, N. Friedman, H. G. Matthies i M. Nikolić. „Lattice Element Model Elastic Behaviour in Solid Mechanics: Bayesian-Based Calibration and Fine-Tuning”. *European Journal of Computational Mechanics* 34(3 and 4) (2025.), str. 241–274. DOI: <https://doi.org/10.13052/ejcm2642-2085.34343>.
- [42] L. Vaiani i A. E. Uva adn A. Boccaccio. „Optimal lattice spring models derived from triangular and tetrahedral meshes”. *International Journal of Mechanical Sciences* 300, 110442 (2025.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.110442>.
- [43] M. Nikolić. „Discrete element model for the failure analysis of partially saturated porous media with propagating cracks represented with embedded strong discontinuities”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 390, 114482 (2022.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114482>.
- [44] J. Čarija, E. Marenić, T. Jarak i M. Nikolić. „Discrete Lattice Element Model for Fracture Propagation with Improved Elastic Response”. *Applied Sciences* 14(3), 1287 (2024.). DOI: <https://doi.org/10.3390/app14031287>.
- [45] B. Rosić, A. Kučerová, J. Sýkora, O. Pajonk, A. Litvinenko i H. G. Matthies. „Parameter identification in a probabilistic setting”. *Engineering Structures* 50 (2013.), str. 179–196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.029>.
- [46] F. Landi, F. Marsili i N. Friedman and P. Croce. „gPCE-Based Stochastic Inverse Methods: A Benchmark Study from a Civil Engineer’s Perspective”. *Infrastructures* 6(11), 158 (2021.). DOI: <https://doi.org/10.3390/infrastructures6110158>.
- [47] N. Noii, A. Khodadadian i T. Wick. „Bayesian inversion for anisotropic hydraulic phase-field fracture”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 386, 114118 (2021.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114118>.
- [48] N. Friedman, C. Zoccarato, E. Zander i H. G. Matthies. „A Worked-out Example of Surrogate-based Bayesian Parameter and Field Identification Methods”. *Bayesian Methods for the Analysis of Engineering Systems; Chiachio Ruano, J., Chiachio Ruano, M., Sankararaman, S., Eds.* (2021.). DOI: <https://doi.org/10.1201/b22018-10>.
- [49] W. K. Hastings. „Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications”. *Biometrika* 57(1) (1970.), str. 97–109. DOI: <https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>.
- [50] A. Lye, A. Cicirello i E. Patelli. „Sampling methods for solving Bayesian model updating problems: A tutorial”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 159, 107760 (2021.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107760>.
- [51] N. Noii, A. Khodadadian, J. Ulloa, F. Aldakheel, T. Wick, S. François i P. Wriggers. „Bayesian Inversion with Open-Source Codes for Various One-Dimensional Model Problems in Computational Mechanics”. *Archives of Computational Methods in Engineering* 29 (2022.), str. 4285–4318. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09751-6>.
- [52] B. Ristic, S. Arulampalam i N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech house, 2003.
- [53] G. Welch i G. Bishop. „An introduction to the Kalman filter”. (1995.).
- [54] O. G. Ernst, B. Sprungk i H. J. Starkloff. „Bayesian Inverse Problems and Kalman Filters”. *Extraction of Quantifiable Information from Complex Systems. Cham: Springer International Publishing* 29 (2014.), str. 133–159. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-08159-5_7.

- [55] M. K. Ramancha, M. A. Vega, J. P. Conte, D. Todd M i Z. Hu. „Bayesian model updating with finite element vs surrogate models: Application to a miter gate structural system”. *Engineering Structures* 272, 114901 (2022.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114901>.
- [56] B. V. Rosić, A. Litvinenko, O. Pajonk i H. G. Matthies. „Direct Bayesian update of polynomial chaos representationsm”. *Institute of Scientific Computing Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät Technische Universität Braunschweig* (2011.). DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201104011413-0>.
- [57] J. S. Brauchart, E. B. Saff, I. H. Sloan i R. S. Womersley. „QMC designs: Optimal order Quasi Monte Carlo integration schemes on the sphere”. *Mathematics of Computation* 83 (2014.), str. 2821–2851. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02839-1>.
- [58] M. Šodan, A. Urbanics, N. Friedman, A. Stanic i M. Nikolić. „Comparison of Machine Learning and gPC-based proxy solutions for an efficient Bayesian identification of fracture parameters”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 436, 117686 (2025.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117686>.
- [59] F. Aldakheel, E. S. Elsayed, Y. Heider i O. Weeger. „Physics-based machine learning for computational fracture mechanics”. *Machine Learning for Computational Science and Engineering* 1(18) (2025.). DOI: <https://doi.org/10.1007/s44379-025-00019-x>.
- [60] C. M. Bishop. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, 1995.
- [61] K. Tripathy R i I. Billionis. „Deep UQ: Learning deep neural network surrogate models for high dimensional uncertainty quantification”. *Journal of Computational Physics* 375 (2018.), str. 565–588. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.08.036>.
- [62] Y. Bengio, I. Goodfellow i A. Courville. *Deep Learning*. MIT press, 2015.
- [63] K. Gurney. *An introduction to neural networks*. CRC press, 2018.
- [64] E. S. Elsayed, A. Baktheer i F. Aldakheel. „Physics-Based Machine Learning for Modeling Cyclic Damage Evolution”. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 26(1) (2026.). DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.70071>.
- [65] Z. Meng, Q. Qian, M. Xu, B. Yu, A. R. Yıldız i S. Mirjalili. „PINN-FORM: A new physics-informed neural network for reliability analysis with partial differential equation”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 414, 116172 (2023.). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116172>.
- [66] I. Sobol. „Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates”. *Mathematics and Computers in Simulation* 55(1-3) (2001.), str. 271–280. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(00\)00270-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(00)00270-6).
- [67] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto i S. Tarantola. „Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index”. *Computer Physics Communications* 181(2) (2010.), str. 259–270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.09.018>.
- [68] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. gatelli, M. Saisana i S. Tarantola. *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley i Sons, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470725184>.